

任意の平面曲線のインボリュートを齒形とする不等速齒車

石 田 喜 助

工 学 部 機 械 工 学 科

1. 序 説

機械工作の現状においては平齒車の齒形輪廓としては、設計、製作、組立、取扱等の点から見て円のインボリュート曲線が合理的である。

平齒車の大部分はホブ盤またはギヤシェーパで齒切りされているから、一般の平面曲線をピッチ曲線にもつ不等速比齒車の齒切りもこれらの齒切り機械でなされるのが経済的である。

そうだとすると、非円形不等速比齒車の齒形輪廓もインボリュートホブまたはインボリュートピニオンカッタによって創成される曲線であることが望ましい。

本研究においては非円形不等速比齒車のピッチ曲線、およびこれと単純な特種な幾何学的関係に立つベース曲線、ならびにこのベース曲線をエボルートとするインボリュート曲線との関係を明らかにした。そして二三の特種な平面曲線をピッチ曲線にもつ齒車について実例を示し、また不等速比齒車の代表的なものと考えられる楕円齒車の運動については相当詳しく論述した。

2. ピ ッ チ 曲 線

第1図に示すように一對の不等速比齒車があって、その一つの齒車Ⅰのピッチ曲線を極方程式

$$\rho_1 = f_1(\theta_1) \quad (1)$$

であたえると、これとかみ合う相手齒車Ⅱのピッチ曲線

$$\rho_2 = f_2(\theta_2) \quad (2)$$

との間には次の関係が成立する。

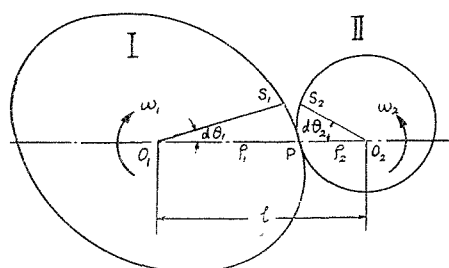
$$\rho_1 + \rho_2 = l \quad (3)$$

ただし l = 両齒車の軸心間距離。

また両ピッチ曲線間にすべりが存在しないという条件から次の関係式が生まれる。

$$\rho_1 d\theta_1 = \rho_2 d\theta_2 \quad (4)$$

以上は一方のピッチ曲線を任意に与えて、これに対応する相手のピッチ曲線を求める方法であるが、ピッチ曲線の代りに



第 1 図

I, II 両歯車の角速度比の変化の状態を与えて, それからピッチ曲線を求めるにはつぎのようになる。

角速度比は軸心からピッチ点までの距離に反比例するから

$$\omega_2/\omega_1 = \rho_1/\rho_2 \quad (5)$$

ただし $\omega_1 = d\theta_1/dt$, $\omega_2 = d\theta_2/dt$ 。

ここで ω_2/ω_1 は II の回転角 θ_2 の函数であるとする。

$$\omega_2/\omega_1 = \Phi(\theta_2) \quad (6)$$

$$\rho_1/\rho_2 = \Phi(\theta_2) \quad (7)$$

(3) と (7) とより

$$(l - \rho_2)/\rho_2 = \Phi(\theta_2)$$

$$\rho_2 = \frac{l}{1 + \Phi(\theta_2)} \quad (8)$$

(4) より $d\theta_1 = (\rho_2/\rho_1) d\theta_2 = \{\rho_2/(l - \rho_2)\} d\theta_2$ となるから, これに (8) を代入して

$$d\theta_1 = \frac{l/\{1 + \Phi(\theta_2)\}}{l - l/\{1 + \Phi(\theta_2)\}} d\theta_2 = \frac{d\theta_2}{\Phi(\theta_2)}$$

これより

$$\theta_1 = \int \frac{d\theta_2}{\Phi(\theta_2)} + C \quad (9)$$

(8) と (3) とより

$$\Phi(\theta_2) = \frac{\rho_1}{l - \rho_1} \quad (10)$$

(8) は歯車 II のピッチ曲線である。歯車 I のピッチ曲線は (9) と (10) によって与えられる。

3. ベース 曲 線

歯車 I と II のピッチ曲線間のごろがり運動の状態は 第 2 図 に示したようなベース曲線を輪廓とする調車にベルトをかけた巻掛伝動装置の運動と全く同一である。ただしベルトは常にピッチ P において軸心連結線 O_1O_2 と交わるものでなければならない。しかもベルトと O_1O_2 との間の角は常に一定で $(\pi/2 - \alpha)$ であるとする。

この巻掛装置による軸 O_1 と O_2 の角速度をそれぞれ ω'_1 , ω'_2 とし, ベルトを意味する直線 SPT へ O_1 および O_2 より下した垂線の脚を N および M とすると

$$\omega'_2/\omega'_1 = O_1N/O_2M$$

しかるに

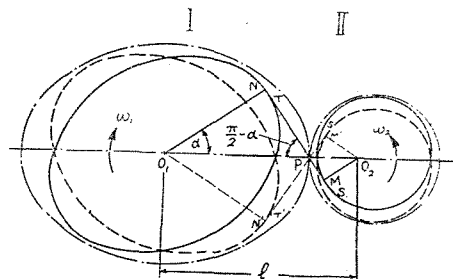
$$O_1N/O_2M = O_1P/O_2P = \rho_1/\rho_2$$

であるから これとさきの式 (5) とより

$$\omega'_2/\omega'_1 = \omega_2/\omega_1 \quad (11)$$

すなわち, ピッチ曲線間のごろがり運動と巻掛装置による運動は同一である。

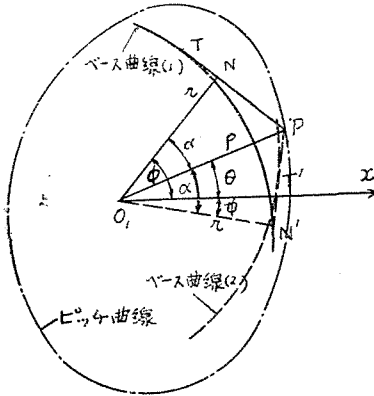
以上は I が主動車で, これが時計方向に回転する場合について述べたのである



第 2 図

が、ⅠとⅡの主従関係が逆になるか、または主従関係がそのまま回転方向が逆になると第2図に破線で示したようにベルトは $S'PT'$ となり、ベース曲線も S' および T' を通る破線のようにになる。

第3図に示したようにピッチ曲線上の任意の点 P よりベース曲線に切線 PT (または $P'T'$) を引き、軸心 O_1 よりこれに垂線 O_1N (または O_1N') を下す。しかるとき P は第2図のピッチ点 P に該当し、 PT (または $P'T'$) はベルトに該当するものであることは明らかである。



第3図

したがって $\angle P O_1 N$ (または $\angle P O_1 N'$) は圧力角 α になる。

いまピッチ曲線を極方程式で

$$\rho = f(\theta) \quad (12)$$

とし、ベース曲線を切線極方程式で

$$r = F(\phi) \quad (13)$$

とすると両者の間には次の関係が成立する。

$$r = \rho \cos \alpha \quad (14)$$

$$\phi = \theta \pm \alpha \quad (15)$$

(15)の正号はベース曲線(1)に対して用い、負号はベース曲線(2)に対して用いる。

(12), (13), (14), (15)の4種の式は一般の平面曲線をピッチ曲線とする歯車のピッチ曲線とこれに対して圧力角 $\alpha =$ 一定なる関係にあるベース曲線との関係をあわしたものである。なお切線極方程式(13)を直交坐標に変換するには次の式を用いる。

$$x = r \cos \phi - \frac{dr}{d\phi} \sin \phi \quad (16)$$

$$y = r \sin \phi + \frac{dr}{d\phi} \cos \phi \quad (17)$$

例1. ピッチ曲線が半径 a なる円の場合。ただし回転軸心と円の中心との間の距離を e とする。

第4図参照。

ピッチ曲線は

$$\rho^2 - 2\rho e \cos \theta + e^2 - a^2 = 0 \quad (18)$$

これより

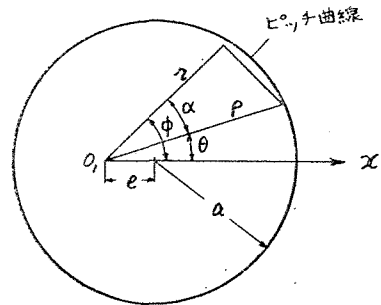
$$\rho = e \cos \theta + \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \theta} \quad (19)$$

(19)と(14), (15)とより

$$r = \left\{ e \cos(\phi \mp \alpha) + \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2(\phi \mp \alpha)} \right\} \cos \alpha \quad (20)$$

(20)がベース曲線の方程式である。これより

$$\frac{dr}{d\phi} = -e \cos \alpha \left\{ \sin(\phi \mp \alpha) + \frac{e \sin(\phi \mp \alpha) \cos(\phi \mp \alpha)}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2(\phi \mp \alpha)}} \right\} \quad (21)$$



第4図

$$\omega_2/\omega_1 = Ke^{a\theta_2} \quad (24)$$

ただし K =常数, a =常数。

(24) をさきの式 (5) に代入して

$$\rho_1/\rho_2 = Ke^{a\theta_2} \quad (25)$$

これを (3) に代入して

$$\rho_2 = l / (1 + Ke^{a\theta_2}) \quad (26)$$

(9) より

$$\theta_1 = -1 / (aKe^{a\theta_2}) + C \quad (27)$$

C と K の値をきめるために まず $\theta_1=0$ のとき $\theta_2=0$ とすると

$$C = \frac{1}{aK} \quad (28)$$

また $\theta_1=2\pi$ のとき $\theta_2=2\pi$ とすると

$$C = 2\pi + 1 / (aKe^{2\pi a}) \quad (29)$$

(28) と (29) より

$$K(2\pi a^2 Ke^{2\pi a} + a - ae^{2\pi a}) = 0$$

ゆえに

$$K = (e^{2\pi a} - 1) / (2\pi ae^{2\pi a}) \quad (30)$$

θ_1 と θ_2 の関係は (28) を (27) に代入して得られる。すなわち

$$\theta_1 = \frac{1}{aK} \left(1 - \frac{1}{e^{a\theta_2}} \right) \quad (31)$$

(26) より

$$e^{a\theta_2} = (l - \rho_2) / K\rho_2 = \rho_1 / \{K(l - \rho_1)\}$$

これを (31) に代入して

$$\rho_1 = Kl / (1 + K - aK\theta_1) \quad (32)$$

(32) と (26) がそれぞれ主動車Ⅰおよび従動車Ⅱのピッチ曲線の極方程式である。

これらのピッチ曲線に対応するベース曲線はさきの式 (14), (15) とピッチ曲線の式から

$$r_1 = Kl \cos \alpha / \{1 + K - aK(\phi_1 \mp \alpha)\} \quad (33)$$

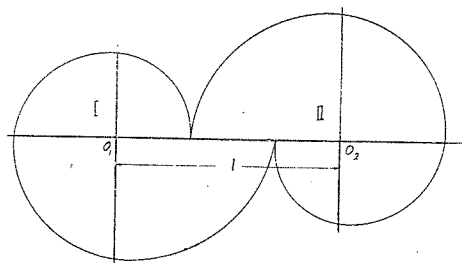
$$r_2 = l \cos \alpha / \{1 + Ke^{a(\phi_2 \mp \alpha)}\} \quad (34)$$

のようになる。

(33), (34) を直交坐標に変換すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{Kl \cos \alpha \cos \phi_1}{1 + K - aK(\phi_1 \mp \alpha)} - \frac{aK^2 l \cos \alpha \sin \phi_1}{\{1 + K - aK(\phi_1 \mp \alpha)\}^2} \dots\dots\dots \\ y_1 &= \frac{Kl \cos \alpha \sin \phi_1}{1 + K - aK(\phi_1 \mp \alpha)} + \frac{aK^2 l \cos \alpha \cos \phi_1}{\{1 + K - aK(\phi_1 \mp \alpha)\}^2} \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{l \cos \alpha \cos \phi_2}{1 + Ke^{a(\phi_2 \mp \alpha)}} + \frac{aKl \cos \alpha e^{a(\phi_2 \mp \alpha)} \sin \phi_2}{\{1 + Ke^{a(\phi_2 \mp \alpha)}\}^2} \dots\dots\dots \\ y_2 &= \frac{l \cos \alpha \sin \phi_2}{1 + Ke^{a(\phi_2 \mp \alpha)}} - \frac{aKl \cos \alpha e^{a(\phi_2 \mp \alpha)} \cos \phi_2}{\{1 + Ke^{a(\phi_2 \mp \alpha)}\}^2} \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (36)$$



第 9 図

いま $l=1$, $K=0.5$, $a=0.25364$ と
してピッチ曲線を描くと 第 9 図 のよう
になる。

例 4. 回転角が対数螺旋線的に変化する
歯車のピッチ曲線とベース曲線。

主動車 I の回転角 θ_1 と従動車 II の回
転角 θ_2 との間に次の関係が成立するも
のとする。

$$(9/2\pi)\theta_1 + 1 = 10^{\theta_2/2\pi} \quad (37)$$

$$\frac{9}{2\pi} d\theta_1 = 10^{\theta_2/2\pi} \frac{d\theta_2}{2\pi m}$$

ただし $m = \log_{10} e = 0.43429 \dots$

$$\frac{d\theta_1}{d\theta_2} = \frac{10^{\theta_2/2\pi}}{9m} \quad (38)$$

(38) とさきの式 (4) とより

$$\rho_1 / \rho_2 = (10^{\theta_2/2\pi}) / (9m) \quad (39)$$

(39) とさきの式 (3) とより

$$\rho_1 + \frac{10^{\theta_2/2\pi}}{9m} \rho_1 = l$$

ゆえに

$$\rho_1 = \frac{18\pi m l}{9\theta_1 + 2\pi(9m+1)} \quad (40)$$

(39) と (3) とより ρ_2 を求めると

$$\rho_2 = \frac{10^{\theta_2/2\pi} l}{10^{\theta_2/2\pi} + 9m} \quad (41)$$

(40) と (41) がそれぞれ主動車 I と従動車 II のピッチ曲線である。

これらのピッチ曲線に対応するベース曲線は式 (14), (15) とピッチ曲線の式から求め
られる。すなわち

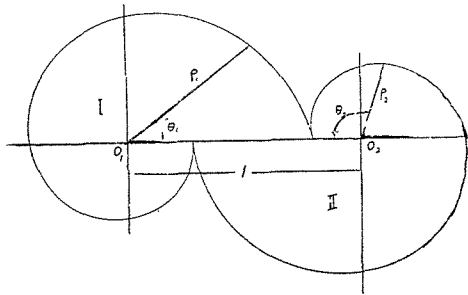
$$r_1 = 18\pi m l \cos \alpha / \{9(\phi_1 \mp \alpha) + 2\pi(9m+1)\} \quad (42)$$

$$r_2 = 10^{(\phi_2 \mp \alpha)/2\pi} l \cos \alpha / \{10^{(\phi_2 \mp \alpha)/2\pi} + 9m\} \quad (43)$$

(42), (43) を直交座標に変換すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{18\pi m l \cos \alpha}{9(\phi_1 \mp \alpha) + 2\pi(9m+1)} \left\{ \cos \phi_1 + \frac{9 \sin \phi_1}{9(\phi_1 \mp \alpha) + 2\pi(9m+1)} \right\} \dots \dots \dots \\ y_1 &= \frac{18\pi m l \cos \alpha}{9(\phi_1 \mp \alpha) + 2\pi(9m+1)} \left\{ \sin \phi_1 - \frac{9 \cos \phi_1}{9(\phi_1 \mp \alpha) + 2\pi(9m+1)} \right\} \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{l \cos \alpha}{10^{(\phi_2 \mp \alpha)/2\pi} + 9m} \left\{ \cos \phi_2 - \frac{9 \sin \phi_2}{2\pi(10^{(\phi_2 \mp \alpha)/2\pi} + 9m)} \right\} \dots \dots \dots \\ y_2 &= \frac{l \cos \alpha}{10^{(\phi_2 \mp \alpha)/2\pi} + 9m} \left\{ \sin \phi_2 + \frac{9 \cos \phi_2}{2\pi(10^{(\phi_2 \mp \alpha)/2\pi} + 9m)} \right\} \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (45)$$



第 10 図

O_1, O_2 ……歯車 I と II の軸心

ρ_1, ρ_2 ……歯車 I と II の軸心からピッチ点までの距離

$\widehat{uu}, \widehat{vv}$ ……歯車 I と II の歯形曲線

P ……ピッチ点

T ……歯形の接点

SPT ……接点軌跡

LM ……接点における歯形の共通切線

歯形 \widehat{uu} および \widehat{vv} を表わすにそれぞれの軸心 O_1 および O_2 を原点とした切線方程式をもってする。すなわち

$$\eta_1 = \psi_1(\sigma_1) \quad (46)$$

$$\eta_2 = \psi_2(\sigma_2) \quad (47)$$

接点軌跡 SPT を表わすに P を極とし、Px を原線とする極方程式をもってする。すなわち

$$\zeta = \psi(\alpha) \quad (48)$$

歯形の接点において歯形に立てた共通垂線は常にピッチ点を通過すべきであって、円形の等速比歯車の場合のかみあい方程式⁽¹⁾はこの場合にも成立する。

$$\eta_1 \cos \sigma_1 = \rho_1 \cos \alpha \quad (49)$$

$$\eta_1 \sin \sigma_1 = \rho_1 \sin \alpha - \zeta \quad (50)$$

$$\eta_2 \cos \sigma_2 = \rho_2 \cos \alpha \quad (51)$$

$$\eta_2 \sin \sigma_2 = \rho_2 \sin \alpha + \zeta \quad (52)$$

いま歯形は圧力角 α が一定なる インボリュート歯形 ということにすると、接点軌跡は P 点を通る直線になり、その極方程式は

$$\alpha = \text{定数} (= \text{圧力角}) \quad (53)$$

(53) を (49), (51) に代入すると

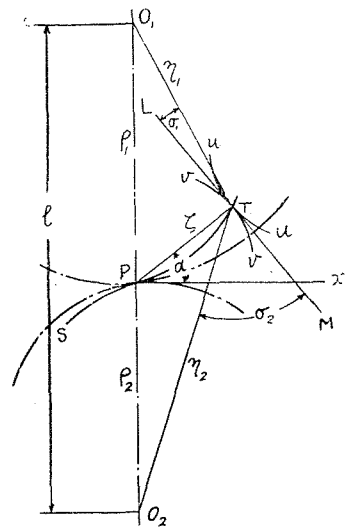
$$\eta_1 \cos \sigma_1 = C \rho_1 \quad (49a)$$

$$\eta_2 \cos \sigma_2 = C \rho_2 \quad (51a)$$

いま $l=1$ としてピッチ曲線を描いて見ると 第10図 のようになる。

4. 歯形曲線

一般の平面曲線をピッチ曲線としてもつ一對の歯車 I と II のかみ合い状態を示したものが 第11図 である。図において



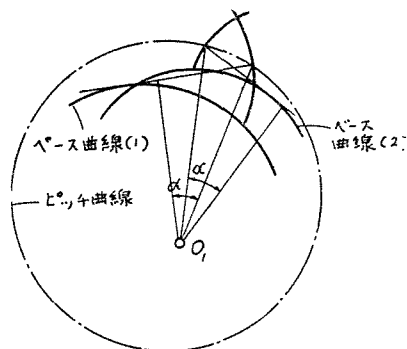
第 11 図

ただし $C = \cos \alpha = \text{定数}$ 。

上の二つの式はピッチ曲線 $\rho_1 = f_1(\theta_1)$, $\rho_2 = f_2(\theta_2)$ に対して圧力角を α としたときのベース曲線 $r_1 = F_1(\phi_1)$, $r_2 = F_2(\phi_2)$ をエボリュート (evolute) にもつインボリュートの式である。

さきに示したピッチ曲線とベース曲線の関係式 (15) は正負両符号をもっている。そのためにピッチ曲線一つに対して二つのベース曲線が得られる。この機構学的意味は

第12図に示したように一つの歯形曲線がベース曲線 (1) のインボリュートで、その背面の歯形曲線がベース曲線 (2) のインボリュートであるということである。



第 12 図

5. 歯 切 り 法

このような歯車の歯切り法の一つは第11図に示した一方の歯車、たとえば I をそのままピニオンカッタにしてカッタと被削歯車の回転角速度比 ω_2/ω_1 が $\omega_2/\omega_1 = \rho_1/\rho_2$ になるように両者の回転速度を調節しつつ歯切りを行うな

らば、当然被削歯車が創成されるはずである。

しかしながらこのような非円形ピニオンカッタの製作は困難で實際上不可能と考えてよい。現状ではインボリュートホブまたはインボリュートピニオンカッタによる方法がもつとも可能性が多いから、円形の普通のピニオンカッタで歯切りすることを考えてみる。

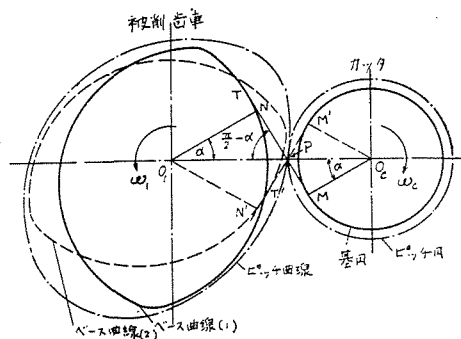
歯切り法としては機構学的に正確ではあるが、実施に多少困難の伴うものと、もう一つは厳密には正確でないが比較的容易に実施できるものとの二つの方法を考えてみた。第13図はこれを説明する図である。

歯切り法第1

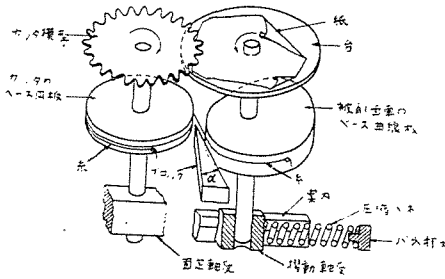
カッタの基円および被削歯車のベース曲線と同形の調車を作り、これにベルト MPT を掛ける。このベルトが両者の軸心連結線 O_1O_2 と常に $(\pi/2 - \alpha)$ なる傾きをなすように O_1O_2 の長さを加減しつつ歯切りを行うのである。

これを模型的に示すと第14図になる。すなわち、カッタ模型とカッタのベース円板は同一軸に固着され、別の軸には台と被削歯車のベース曲線板が固着されて

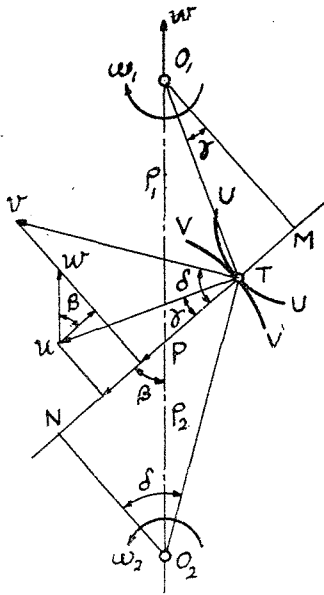
いる。被削歯車のベース曲線板は楔形のブロックにばねで押しつけられている。ブロックは圧力角 α の傾きをもっているので、カッタと被削歯車の間の圧力角は常に α にたもたれる。カッタのベース円板と被削歯車のベース曲線板の間には糸がまきつけられてい



第 13 図



第 14 図



第 15 図

る。この糸を緊張させたまま一方を回転させると他方は反対方向に回転するからカッタ模型の歯形を台上の紙に写しとると被削歯車が得られる。

歯切り法第2

第15図において歯車Ⅰ,Ⅱの歯形曲線をそれぞれ \widehat{UU} , \widehat{VV} とする。 T は両歯形の接点, MN は T を通る歯形の共通垂線, β は圧力角の余角つまり $\beta = \pi/2 - \alpha$, P は両ピッチ曲線の相会する点, u と v はそれぞれ \widehat{UU} と \widehat{VV} 上の点 T の O_1 および O_2 に対する速度, ω_1 と ω_2 は歯車の角速度 w は O_2 に対する O_1 の移動速度 つまりこの場合は 軸間距離が歯車の回転に伴って変化するものとする。

$$w = \frac{d}{dt} (\rho_1 + \rho_2)$$

\widehat{UU} および \widehat{VV} の MN 方向の速度はそれぞれ $u \cos \gamma - w \cos \beta$ および $v \cos \delta$ で, これらは相等しくなければならぬから

$$u \cos \gamma - w \cos \beta = v \cos \delta$$

しかるに

$$u \cos \gamma = O_1 T \cdot \omega_1 \cos \gamma = \rho_1 \omega_1 \sin \beta$$

$$v \cos \delta = O_2 T \cdot \omega_2 \cos \delta = \rho_2 \omega_2 \sin \beta$$

これらを上の式に代入して

$$\rho_1 \omega_1 - \frac{d}{dt} (\rho_1 + \rho_2) \cot \beta - \rho_2 \omega_2 = 0$$

$$\rho_1 d\theta_1 - d\rho_1 \cdot \tan \alpha - d\rho_2 \cdot \tan \alpha - \rho_2 d\theta_2 = 0 \quad (55)$$

ここで ρ_1 と ρ_2 がそれぞれ θ_1 と θ_2 のある函数として与えられれば(55)より θ_1 と θ_2 の関係は容易に求められる。

歯車Ⅰ,Ⅱのうちの一つ,たとえばⅡが普通のピニオンカッタであって,そのピッチ円半径が R_c ,回転角が θ_c だとすると,(55)の ρ_2 の代りに $R_c = \text{定数}$ θ_2 の代りに θ_c を代入して次の式が得られる。

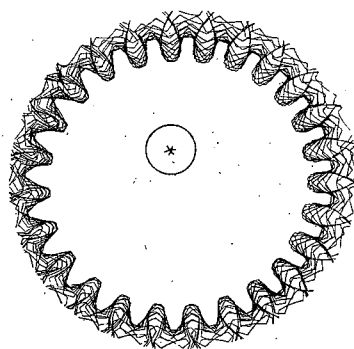
$$R_c \theta_c = \int \rho_1 d\theta_1 - \rho_1 \tan \alpha + C \quad (56)$$

被削歯車が円に近似している場合には(56)は次のように変形しても実用上は支障がない。

$$R_c \theta_c = \int \rho_1 d\theta_1 + C' \quad (56a)$$

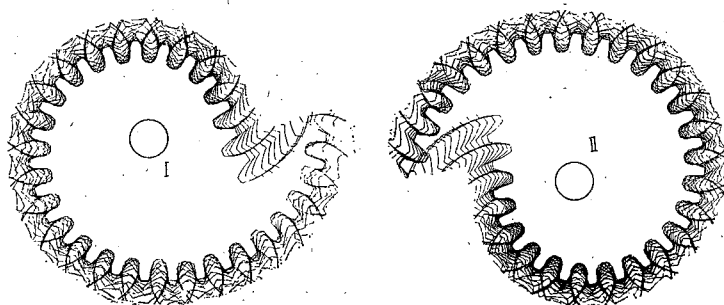
つまり(56)の式について種々の θ_c の値に対して,それに対応する θ_1 と ρ_1 の値をあらかじめ計算しておき,それをもとにしてカッタと被削歯車の回転角および軸心間距離を調節しつつ歯切りを行えばよい。

例5 さきの例2のベース曲線(円)において $b=47\text{mm}$, $e=11.75\text{mm}$, $\alpha=20^\circ$ とし, カッタとしては歯数25, モジュール4, 圧力角 20° のピニオンカッタを用いて, 第1の方法で歯形を創成したのが第16図である。



第 16 図

例6 さきの例3において主動車および従動車の軸心間距離 $l=100\text{mm}$, $K=0.5$, $a=0.25364$, $\alpha=20^\circ$ とし, これに歯数25, モジュール4, 圧力角 20° のピニオンカッタで歯を第1の方法で創成したのが第17図である。



第 17 図

6. 角速度比が正弦曲線的に変化する歯車

不等速比歯車を実際に機械要素として利用する場合を考えてみると, その速度変化の状態はできるだけ単純で, しかも速度変動範囲はある程度大きくも小さくも自由になる方が好都合である。それで次の式(57)で示したように角速度比が回転角に対して正弦的に変化する場合を考えて見る。

$$\begin{aligned}\omega_2 / \omega_1 &= m + n \cos(\omega_1 t) \\ &= m + n \cos \theta_1\end{aligned}\quad (51)$$

ただし m =定数, n =定数, t =時間

さきの式(6)より

$$\Phi_1(\theta_1) = m + n \cos \theta_1$$

これを(8)に代入して

$$\rho_1 = l / (1 + m + n \cos \theta_1) \quad (58)$$

(9)に代入して整頓すると

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \int \frac{d\theta_1}{m + n \cos \theta_1} + C \\ \tan \left\{ \sqrt{m^2 - n^2} \frac{\theta_1}{2} + C \right\} &= \sqrt{\frac{m-n}{m+n}} \tan \frac{\theta_1}{2}\end{aligned}$$

積分常数 C' の値をきめるために $\theta_1=0$ のとき $\theta_2=0$ とおくと $C'=0$ となる。また $\theta_1=\pi$ のとき $\theta_2=\pi$ とおくと $\sqrt{m^2-n^2}=1$ となる。すなわち

$$m^2-n^2=1, \quad n=\sqrt{m^2-1} \quad (59)$$

したがって もとの式は

$$\tan \frac{\theta_1}{2} = \sqrt{\frac{m-n}{m+n}} \tan \frac{\theta_2}{2} \quad (60)$$

(60) を変形すると

$$\cos \theta_2 = (m \cos \theta_1 - n) / (m - n \cos \theta_1) \quad (60a)$$

(60) より $d\theta_2/d\theta_1$ を求めると

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \sqrt{\frac{m+n}{m-n}} \cdot \frac{\cos^2(\theta_2/2)}{\cos^2(\theta_1/2)} \quad (61)$$

(4) より $\rho_1 = \rho_2 d\theta_2/d\theta_1$ であるから、これに (58) と (61) を代入すると

$$\rho_1 = \frac{l}{1+m+n \cos \theta_2} \sqrt{\frac{m+n}{m-n}} \cdot \frac{1+\cos \theta_2}{1+\cos \theta_1}$$

これに (60a) を代入して整頓すると

$$\rho_1 = l / (1+m-n \cos \theta_1) \quad (62)$$

(62), (58) の両式に (59) の関係を導入すると

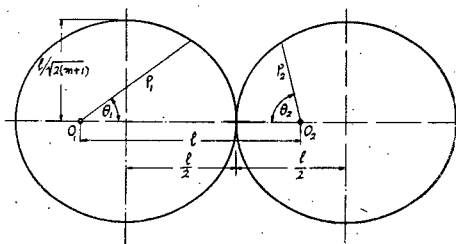
$$\rho_1 = \frac{l/(m+1)}{1-\sqrt{(m-1)/(m+1)} \cos \theta_1} \quad (63)$$

$$\rho_2 = \frac{l/(m+1)}{1+\sqrt{(m-1)/(m+1)} \cos \theta_2} \quad (64)$$

すなわち 角速度比が正弦曲線的に 変化する歯車の ピッチ曲線は 極方程式 (63) および (64) に示したようになる。そしてこれら二つの式は 第18図 に示したように 長半軸が $l/2$, 短半軸が $l/\sqrt{2(m+1)}$ 離心率が $\sqrt{(m-1)/(m+1)}$ なる楕円である。

これに対する ベース曲線はさきの式 (13), (14), (15) より求められる。

すなわち



第 18 図

$$r_1 = \frac{l \cos \alpha / (m+1)}{1-\sqrt{(m-1)/(m+1)} \cos (\phi_1 \mp \alpha)}$$

$$r_2 = \frac{l \cos \alpha / (m+1)}{1+\sqrt{(m-1)/(m+1)} \cos (\phi_2 \mp \alpha)}$$

楕円歯車の角速度比は (57) で示したとおりであるから、これに (59) を代入して

$$\omega_2/\omega_1 = m + \sqrt{m^2-1} \cos \theta_2$$

ω_2/ω_1 は θ_2 が零および π のときに最大および最小になる。すなわち

$$[\omega_2/\omega_1]_{max} = m + \sqrt{m^2 - 1}$$

$$[\omega_2/\omega_1]_{min} = m - \sqrt{m^2 - 1}$$

主動車の角速度 ω_1 を一定にした場合の 従動車の角速度の 最大値および 最小値をそれぞれ ω_{2max} および ω_{2min} とすると

$$\omega_{2max}/\omega_{2min} = (m + \sqrt{m^2 - 1}) / (m - \sqrt{m^2 - 1})$$

$\omega_{2max}/\omega_{2min}$ の種々の値に対する 常数 m および 離心率 ε の値を求めて見ると次の表のようになる。

$\omega_{2max}/\omega_{2min}$	=1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
m	=1	1.0042	1.0142	1.0277	1.0435	1.0607
$\varepsilon = \sqrt{(m-1)/(m+1)}$	=0	0.0458	0.0840	0.1169	0.1459	0.1716

機械要素としての不等速歯車における $\omega_{2max}/\omega_{2min}$ の値は、その機械の種類および用途によって異なるけれども、2 以上であることは稀で一般には 1.4~1.6 位である。すなわち、これを楕円歯車について云えば 離心率が 0.08~0.12 程度のものが最も用途が広いのである。

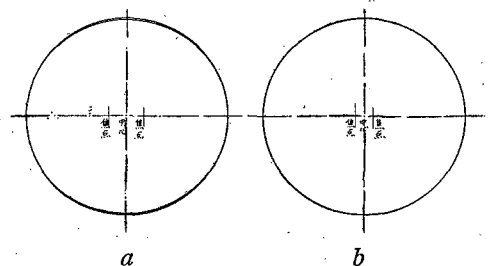
ところで $\omega_{2max}/\omega_{2min}=2$, $\varepsilon=0.1716$ および $\omega_{2max}/\omega_{2min}=1.4$, $\varepsilon=0.0840$ なる 2 種の楕円歯車のピッチ楕円を実際に描いてみると、第19図(a), (b) のようになる。(a)は $\varepsilon=0.1716$ の場合で楕円に外接する円が細線で表わされている。この図でわかるように楕円は外接円に甚だ近似している。(b)は $\varepsilon=0.0840$ の場合であって近似の程度は一層大きい。

不等速比歯車の角速度比の変化状態はできるだけ単純であるのがよいので、正弦曲線的に速度比の変る歯車を探してみた。そして探し得たものはピッチ曲線が楕円で、その焦点を軸心にした楕円歯車である。

楕円歯車は 主動車と従動車 が全く同形同大で、その幾何学的性質がよく知られている点で有利であるが、現在の 歯切り 機械と 歯切り法では その製作が 必ずしも 容易でない。

ひるがえつて実際に頻繁に用いられている楕円歯車を見ると その離心率は 0.08~0.12 程度のものが特に多くて、一見したところ軸心をその中心からずらした円形歯車に近似している。よって離心率の小さい楕円歯車が必要なときは 円形の歯車に偏心した軸をとりつけたもので代用することができるならば実用上非常に有利になるのである。

この問題の解決には偏心した軸を有する円形歯車の回転理論を明らかにし、次にこれと楕円歯車の幾何学的および運動学的比較研究が必要であるが、それはさきに発表した二つの論文⁽²⁾でなされた。



第 19 図

7. 結 論

任意の平面曲線を一つの歯車のピッチ曲線とした場合に、これとかみ合う相手の歯車のピッチ曲線。あるいは主動車と従動車の角速度比が 回転角の函数として 与えられた場合の両歯車のピッチ曲線。これらのものは比較的簡単な幾何学的関係から求めることができる。

歯形曲線としては、圧力角 α = 定数の インボリュート をとることにする。この インボリュート に対する エボリュート が歯車の ベース曲線 になるわけであるが、歯車の軸心を極にして ピッチ曲線 を極方程式、ベース曲線を切線極方程式、歯形曲線を切線方程式で表わすならば、これら三つの間には きわめて単純な関係が 成立するのである。したがって、任意の平面曲線がピッチ曲線として与えられると、これとかみ合う相手のピッチ曲線が得られ、ピッチ曲線 が決定すれば、それと圧力角一定なる関係にあるベース曲線が求められる。逆に ベース曲線 が与えられれば、それに対応する ピッチ曲線 を求めることも容易である。

非円形の 平面曲線 を ピッチ曲線 としてもつ インボリュート歯車 の創成歯切りは円形の インボリュートピニオンカッタ によるのがもっとも実用的だと考えられるので、それについても考察を加えた。

円形ピニオンカッタと非円形平面曲線歯車のかみ合いの場合には当然かみ合い運動中に両者の中心間距離が変化するので、それに対処するために一つの方法としてベース曲線板を調車とする ペルト伝動装置 を考え、また別の方法としてはこのような場合の両者の回転角の関係ならびに中心距離を精密に計算する式を与えた。

実際に非円形歯車を機械要素として利用する場合には速度比の変化は正弦波形のように単純なものが便利なので、そのように速度比の変化するものを探した結果 楕円歯車 に到達した。しかも一般的に実用されている楕円歯車は離心率の小さい、ほとんど円に近く見えるような 楕円 を ピッチ曲線 にもつものであることが知れた。

参 考 文 献

- 1) W. Hartmann ; Die Maschinengetriebe, Band I, (1913)
- 2) 石 田 喜 助 ; 偏心歯車, 日本機械学会論文集, 15巻50号(昭24), IV-80.
石 田 喜 助 ; 偏心歯車の実際とその応用, 日本機械学会論文集, 17巻59号(昭26), 110.

Involute Non-circular Gears

Kisuke ISHIDA

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering

Generally speaking, the studies of noncircular gears have been just begun ; of course we have a few reports about them, but very few of theoretical research.

In this paper, the writer introduced two relations mathematically ; one is the relation between the base curve and the pitch curve, and the other between the pitch curve and the tooth profile. These mathematical relations are very simple; therefore, both the tooth profile and the base curve to any given pitch curve are very easy to get, which are shown in the illustrations.

Especially the elliptic gears, most widely used in noncircular gears, were studied minutely as an initiative step in the eccentric gears.